

Géométrie algorithmique

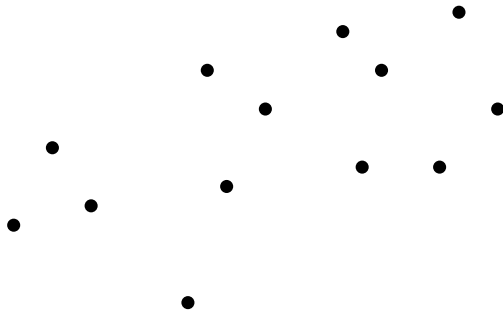
Des mathématiques pour la modélisation du monde réel

Guillaume Moroz

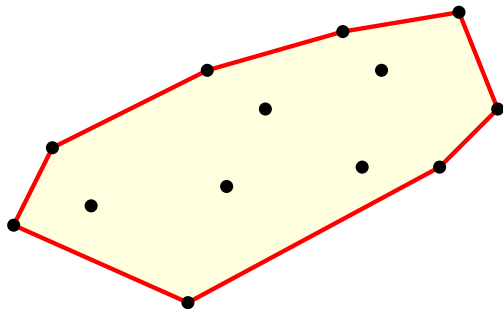
Inria

4 février 2020

Avec des points

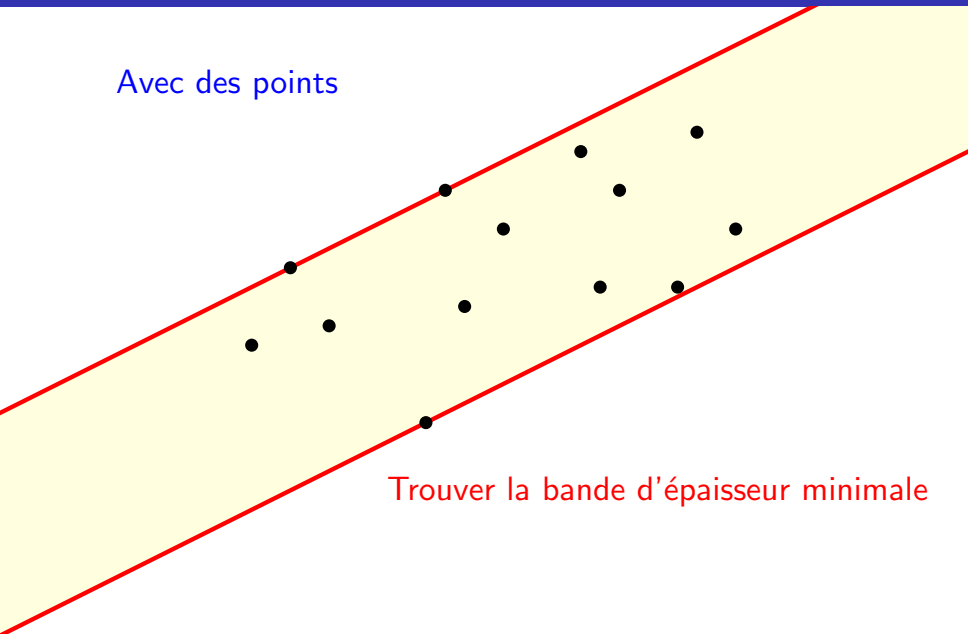


Avec des points



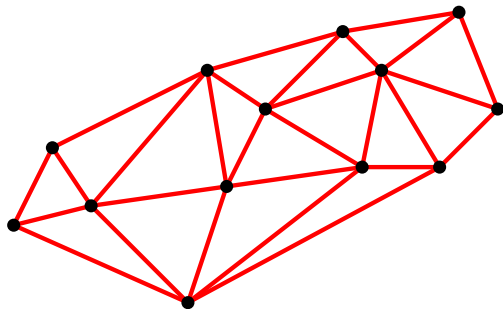
Trouver l'enveloppe convexe

Avec des points



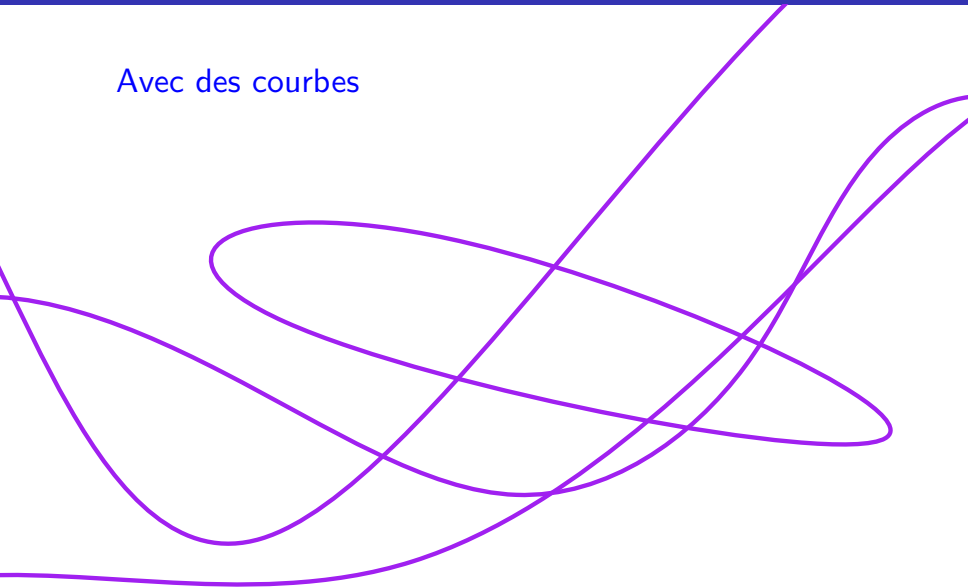
Trouver la bande d'épaisseur minimale

Avec des points



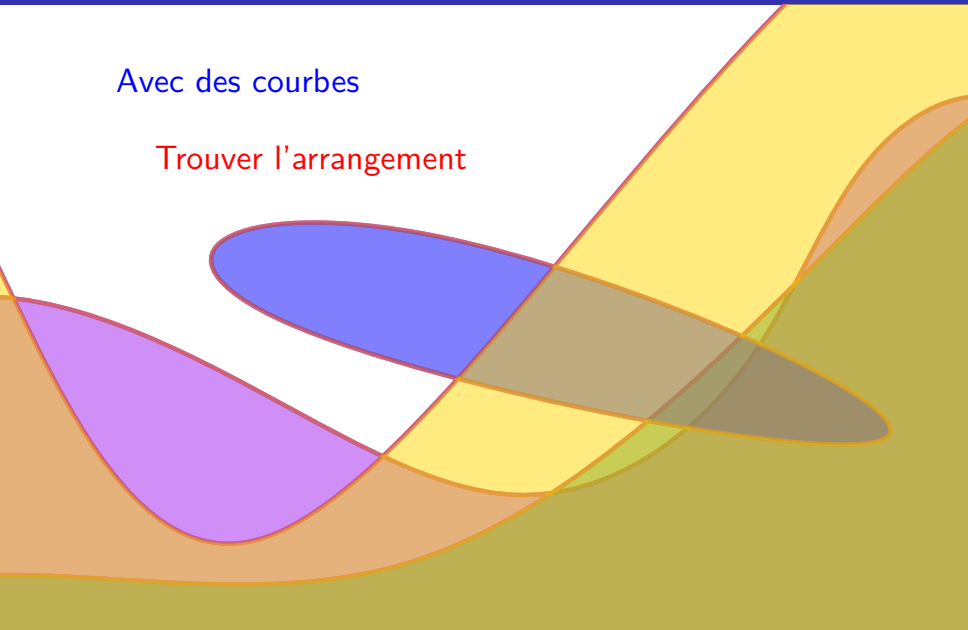
Trouver la triangulation de Delaunay

Avec des courbes



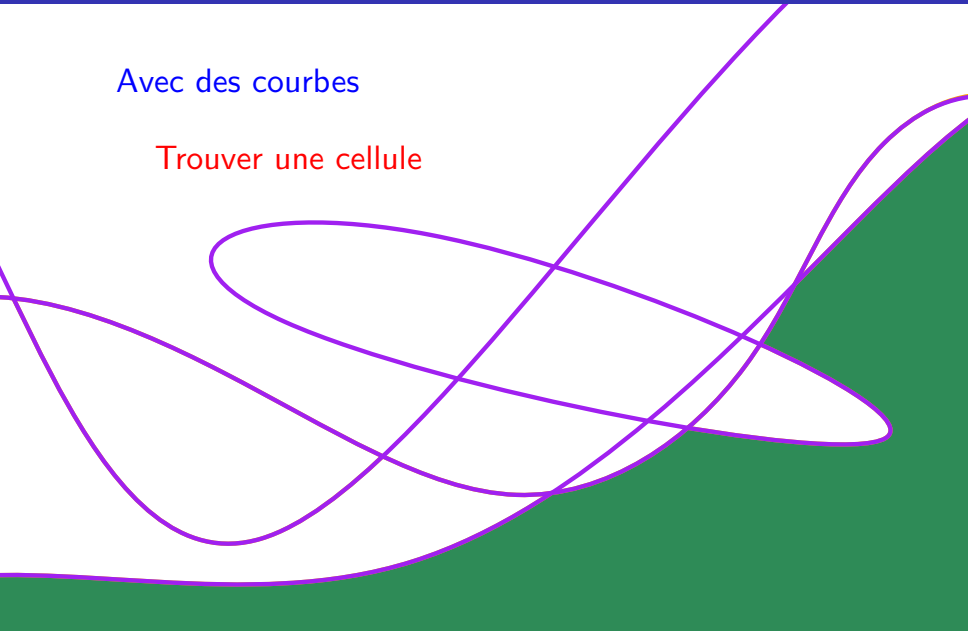
Avec des courbes

Trouver l'arrangement



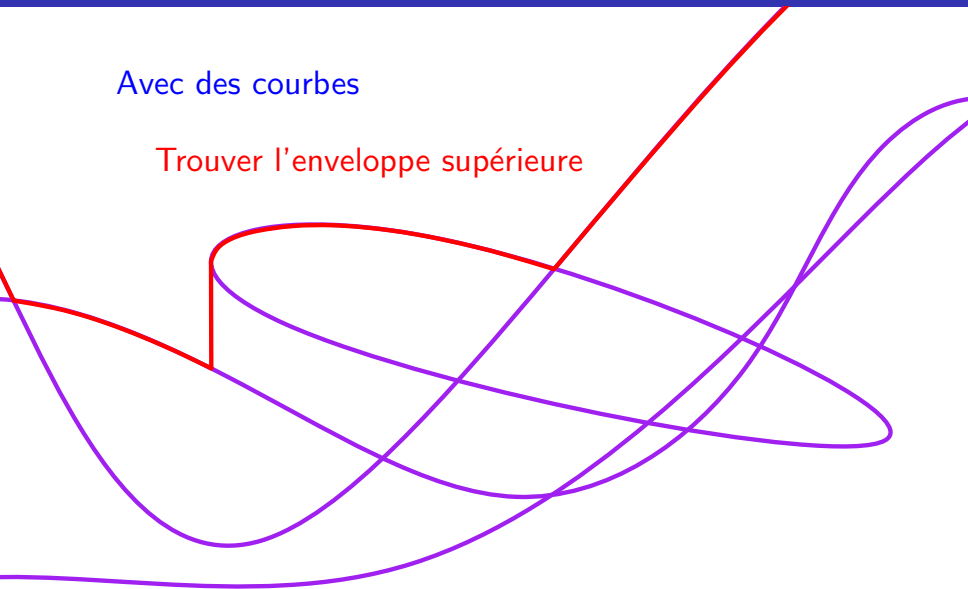
Avec des courbes

Trouver une cellule



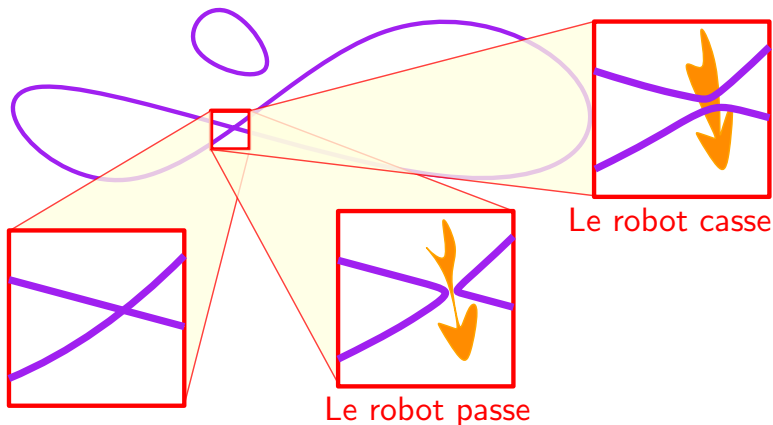
Avec des courbes

Trouver l'enveloppe supérieure



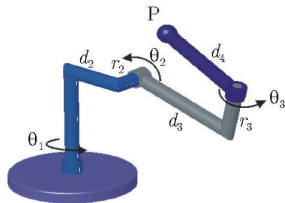
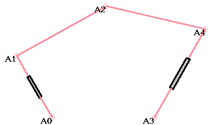
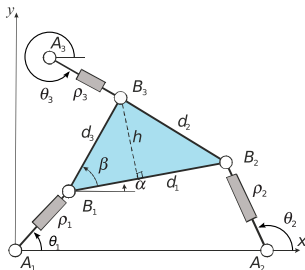
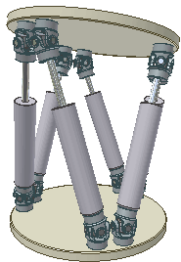
Avec une seule courbe

$$f(x, y) = 0$$



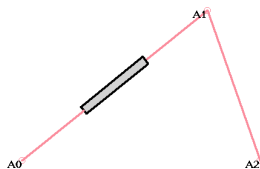
Section 1

Géométrie des courbes



- Variables articulaires
 - r_1
- Variables de pose
 - x, y
- Variables passives
 - θ_1, θ_2

Parallèle RPR-R

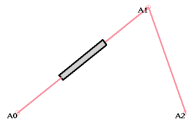


- Equations

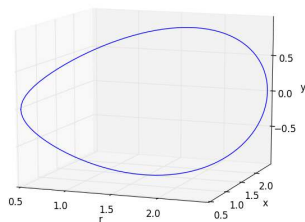
$$(F) \begin{cases} x = r_1 \cos(\theta_1) \\ x = 2 - \cos(\theta_2) \\ y = r_1 \sin(\theta_1) \\ y = \sin(\theta_2) \end{cases}$$

Espace de travail, espace articulaire

- Q : espace articulaire
- W : espace de travail
- Espace total: $Q \times W$
 - Solutions de F : $V(F) \subset W \times Q$

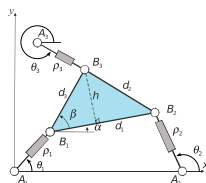


Parallèle RPR-R

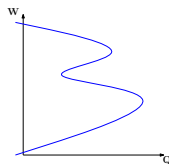


- Projections canoniques:
 - $\pi_W : V(F) \rightarrow W$
 - $\pi_Q : V(F) \rightarrow Q$

- Nomenclature:
 - P: lien prismatique
 - R: lien rotule
 - S: lien sphérique
 - U: lien cardan

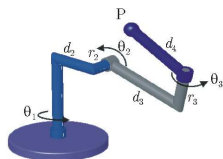


Parallèle 3-RPR

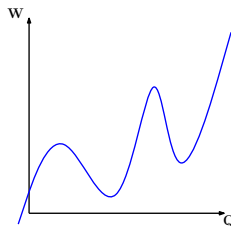


Propriété

- Modèle Géométrique Inverse (MGI) facile
- Modèle Géométrique Directe (MGD) difficile: plusieurs solutions
- 2 solutions peuvent se croiser
 - **perte de contrôle**
 - **casse**

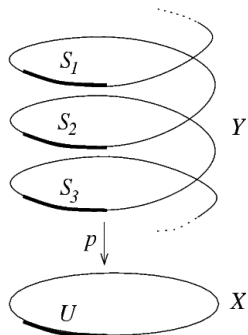


Sérielle 3R



Propriété

- Modèle Géométrique Inverse (MGI) difficile
- Modèle Géométrique Directe (MGD): 1 solutions



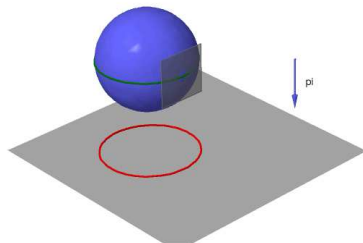
Définition

L'application continue $f : S \rightarrow U$ est un **revêtement** si:

$$f^{-1}(U) = S_1 \cup \dots \cup S_k \text{ où } \begin{cases} S_i \overset{f}{\simeq} U \\ S_i \text{ deux à deux disjoints.} \end{cases}$$

Points critiques

- $V \subset \mathbb{R}^n$ variété lisse de dimension p
- $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ projection canonique



Points critiques

Soit $T(a)$ l'espace linéaire tangent à V au point a .

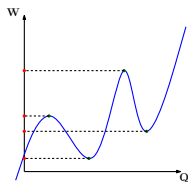
Les **points critiques** a de V pour la projection π vérifient:

$$\dim(\pi(T(a))) < p$$

Cas robot sériels

Hypothèse: $V(F)$ lisse, bornée, équidimensionnelle.

- MGD: toujours 1 solution $\Rightarrow \pi_Q : V(F) \rightarrow Q$ inversible
- MGI: on partitionne W en W_0, W_1, \dots, W_k tq:
 - W_0 sont les valeurs critiques de π_W
 - W_1, \dots, W_k sont les composantes connexes de $W \setminus W_0$
- Points critiques de π_W : **singularités sérielles**



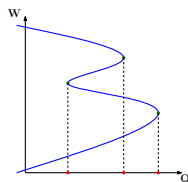
Théorème (revêtement et valeurs critiques)

Pour tout $1 \leq i \leq k$, la restriction de π_W à $\pi_W^{-1}(W_i)$ forme un revêtement au-dessus de W_i .

Cas robot parallèle

Hypothèse: $V(F)$ lisse, bornée, équidimensionnelle.

- MGI: toujours 1 solution $\Rightarrow \pi_W : V(F) \rightarrow W$ inversible
- MGD: on partitionne Q en Q_0, Q_1, \dots, Q_k tq:
 - Q_0 sont les valeurs critiques de π_Q
 - Q_1, \dots, Q_k sont les composantes connexes de $Q \setminus Q_0$
- Points critiques de π_Q : **singularités parallèles**



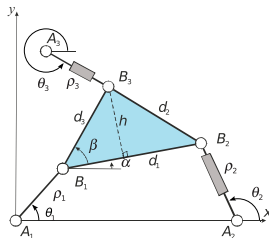
Théorème (revêtement et valeurs critiques)

Pour tout $1 \leq i \leq k$, la restriction de π_Q à $\pi_Q^{-1}(Q_i)$ forme un revêtement au-dessus de Q_i .

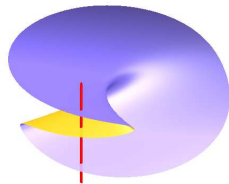
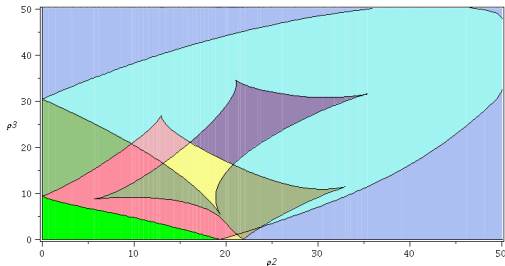
Exemple

- 3-RPR:

- Parallèle
- r_1 fixé
- Variables articulaires: r_2, r_3
- Variables de pose: $B_{1x}, B_{1y}, \alpha_x, \alpha_y$



- Valeurs critiques de π_Q , et partition de Q



Hypothèse: $V(F)$ lisse, bornée, équidimensionnelle

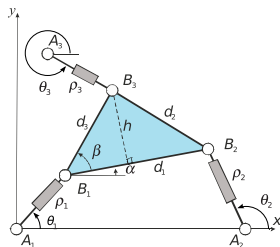
$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_A dx + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial q}}_B dq = 0$$

- Singularités parallèles

$$(S_p) : F = 0, \det(A) = 0$$

- Q_0 , valeurs critiques de π_Q : élimination de x_i dans (S_p)
 - résultants
 - bases de Gröbner
- Q_1, \dots, Q_k , complémentaire des valeurs critiques:
 - CAD (décomposition cylindrique algébrique)

Équations de contrainte du robot 3-RPR



$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 := \alpha_x^2 + \alpha_y^2 - 1 = 0 \\ f_2 := B_{1x}^2 + B_{1y}^2 - r_1^2 = 0 \\ f_3 := (B_{1x} + 17.04\alpha_x - 15.91)^2 + (B_{1y} + 17.04\alpha_y)^2 - r_2^2 = 0 \\ f_4 := (B_{1x} + 10.82\alpha_x - 13.16\alpha_y - 2)^2 + \\ \quad (B_{1y} + 13.16\alpha_x + 10.82\alpha_y - 5)^2 - r_3^2 = 0 \end{array} \right.$$

- 3 paramètres, 4 inconnues
- Génériquement 0-dimensionnel
- Génériquement en intersection complète

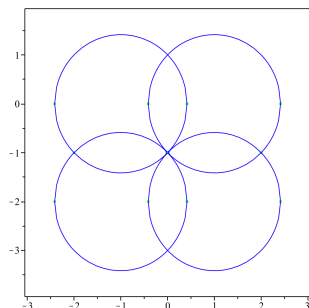
Donnée: équation implicite d'une courbe algébrique

$$[(x + 1)^2 + y^2 - 2] [(x - 1)^2 + y^2 - 2]$$

$$[(x + 1)^2 + (y + 2)^2 - 2] [(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 2] - 10^{-6} = 0$$

Résultat: approximation polygonale de la courbe

Topologie certifiée & bonne approximation géométrique

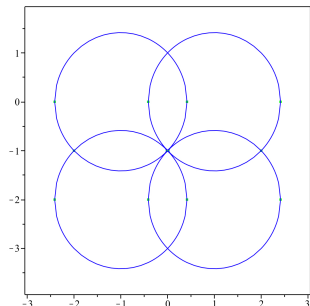


Donnée: équation implicite d'une courbe algébrique

$$1000000x^8 + 4000000x^6y^2 + 6000000x^4y^4 + 4000000x^2y^6 + 1000000y^8 + 8000000x^6y + 24000000x^4y^3 + 24000000x^2y^5 + 8000000y^7 - 4000000x^6 + 12000000x^4y^2 + 36000000x^2y^4 + 20000000y^6 - 24000000x^4y - 16000000x^2y^3 + 8000000y^5 - 2000000x^4 - 116000000x^2y^2 - 34000000y^4 - 136000000x^2y - 40000000y^3 - 52000000x^2 + 4000000y^2 + 24000000y + 8999999 = 0$$

Résultat: approximation polygonale de la courbe

Topologie certifiée & bonne approximation géométrique

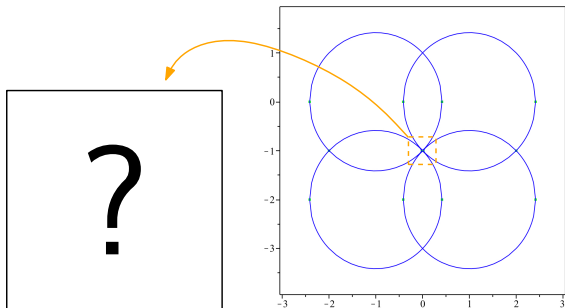


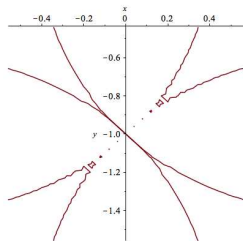
Donnée: équation implicite d'une courbe algébrique

$$1000000x^8 + 4000000x^6y^2 + 6000000x^4y^4 + 4000000x^2y^6 + 1000000y^8 + 8000000x^6y + 24000000x^4y^3 + 24000000x^2y^5 + 8000000y^7 - 4000000x^6 + 12000000x^4y^2 + 36000000x^2y^4 + 20000000y^6 - 24000000x^4y - 16000000x^2y^3 + 8000000y^5 - 2000000x^4 - 116000000x^2y^2 - 34000000y^4 - 136000000x^2y - 40000000y^3 - 52000000x^2 + 4000000y^2 + 24000000y + 8999999 = 0$$

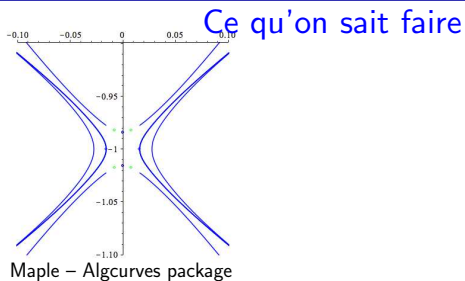
Résultat: approximation polygonale de la courbe

Topologie certifiée & bonne approximation géométrique

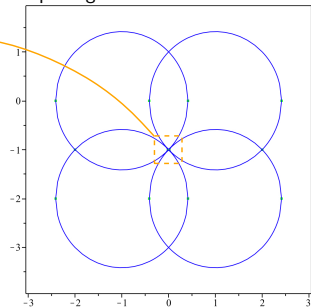
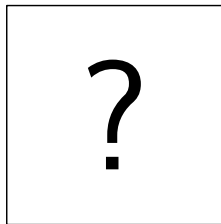


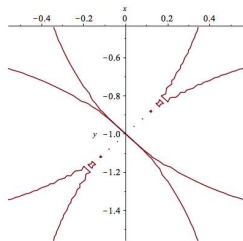


Maple implicit plot

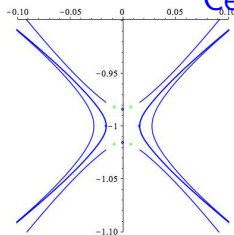


Maple - Algcurves package



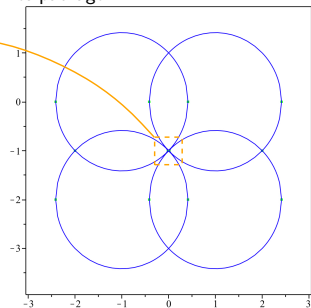
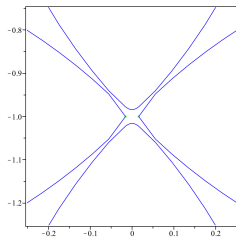


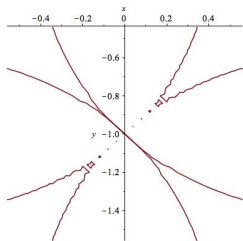
Maple implicit plot



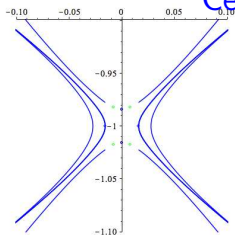
Maple – Algcurves package

ISOTOP



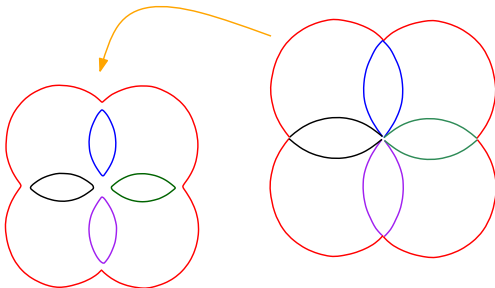


Maple implicit plot



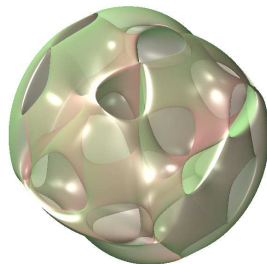
Maple - Algcurves package

ISOTOP



5 composantes connexes lisses, pas de singularités

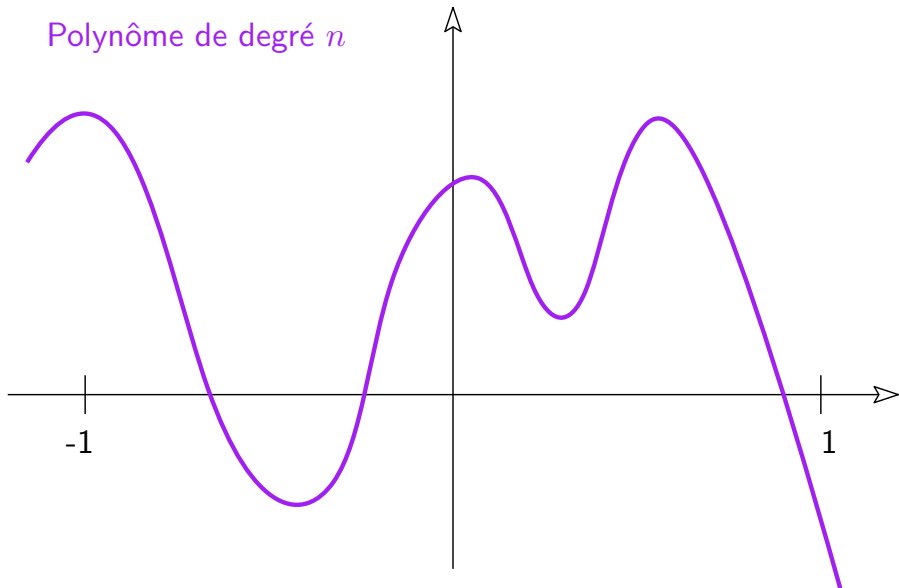
Ce que l'on voudrait faire



Topologie certifiée de surfaces algébriques

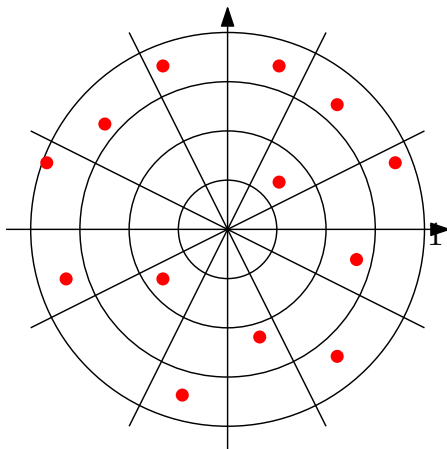
Stage - Résolution d'équation polynomiale

Polynôme de degré n



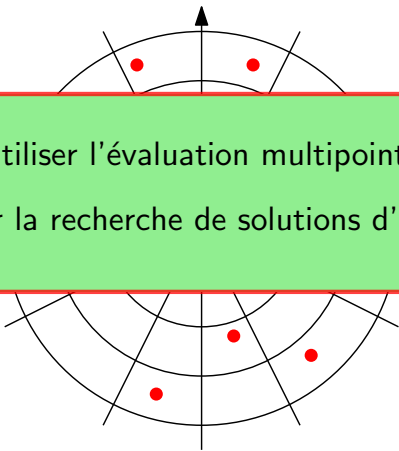
Stage - Résolution d'équation polynomiale

Polynôme de degré n avec des solutions complexes



Stage - Résolution d'équation polynomiale

Polynôme de degré n avec des solutions complexes

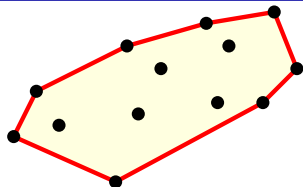


Utiliser l'évaluation multipoint

pour accélérer la recherche de solutions d'un polynôme

Section 2

Géométrie des points



Concevoir des algorithmes

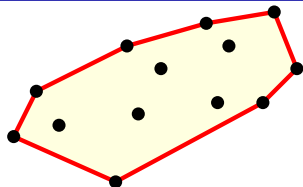
Étudier leur complexité

Trouver l'enveloppe convexe

Pour chaque paire de points,
regarder si tous les autres
points sont du même côté

$O(n^3)$

*dans le cas le pire
/ en moyenne
asymptotique
optimalité*



Trouver l'enveloppe convexe

Pour chaque paire de points,
regarder si tous les autres
points sont du même côté

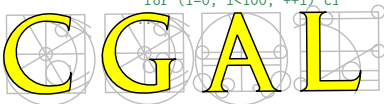
Concevoir des algorithmes

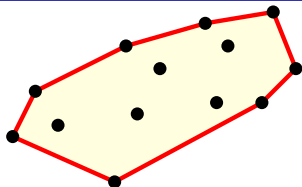
Étudier leur complexité

Programmer

debug
benchmarks

```
class point{ double x,y;}  
main{  
  point *data[100];  
  for (i=0; i<100; ++i) ci
```





Concevoir des algorithmes

Étudier leur complexité

Trouver l'enveloppe convexe

Pour chaque paire de points,
regarder si tous les autres
points sont du même côté

$$O(n^3)$$

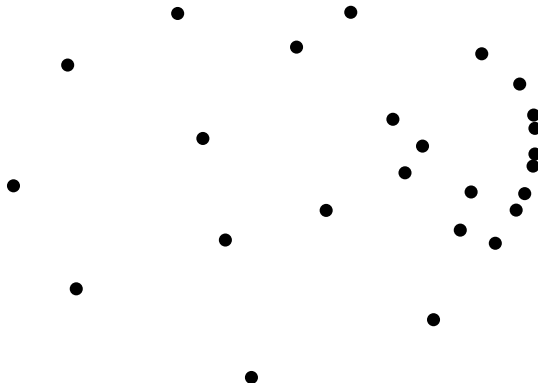
Vous avez mieux ?

incremental

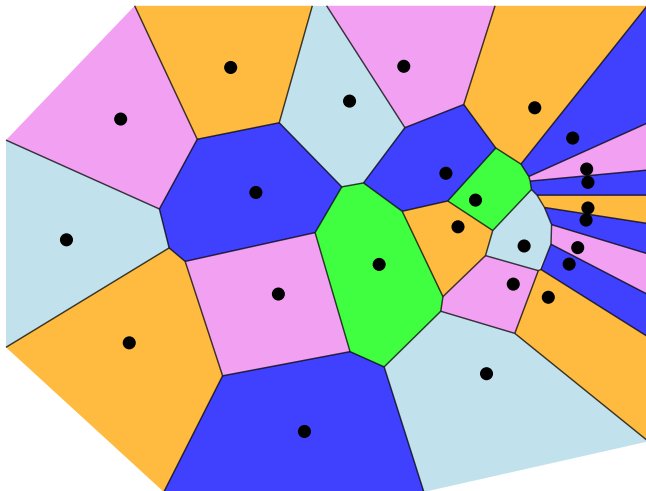
$$O(n^2)$$

$$\Theta(n \log n)$$

Triangulation Delaunay et diagramme de Voronoï



Triangulation Delaunay et diagramme de Voronoï



Triangulation Delaunay et diagramme de Voronoï

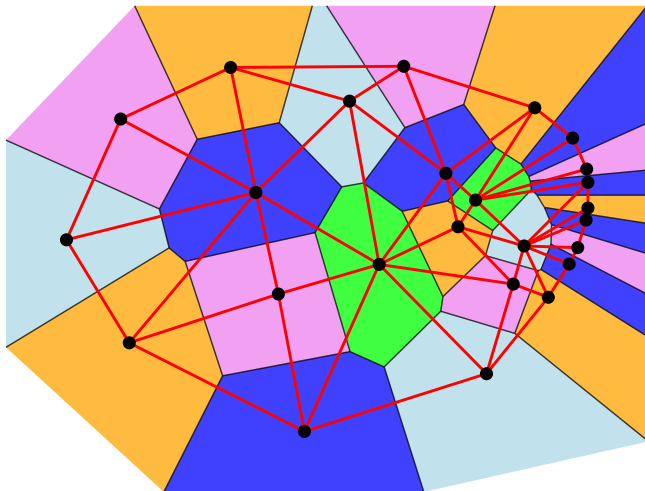




Diagramme de Voronoï dans la nature





Diagramme de Voronoï dans la nature



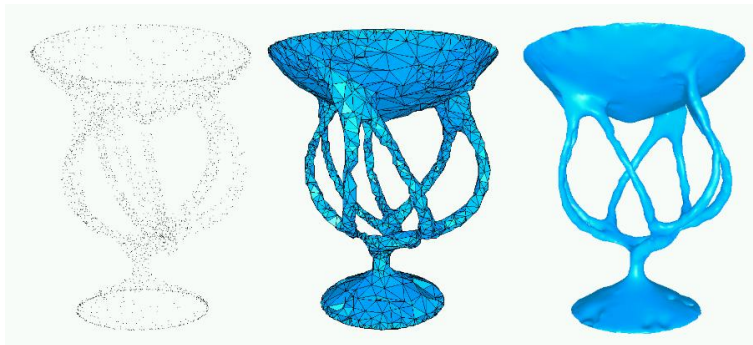


Diagramme de Voronoï dans la nature



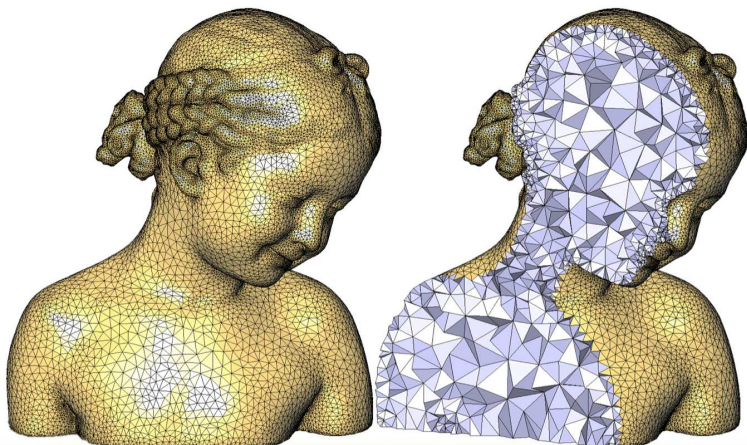
Plein d'applications

Reconstruction

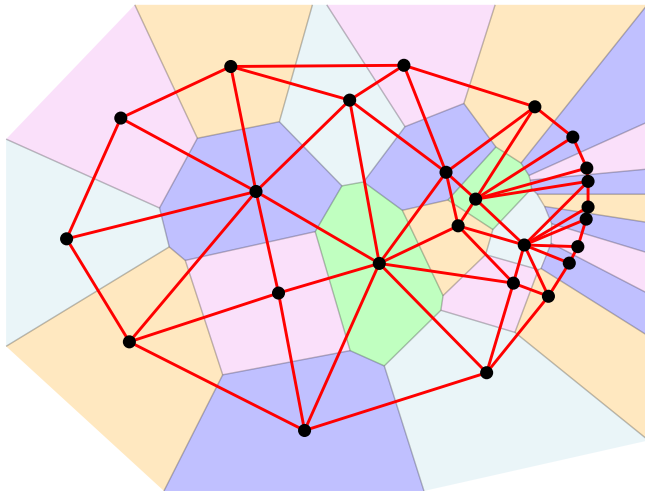


Plein d'applications

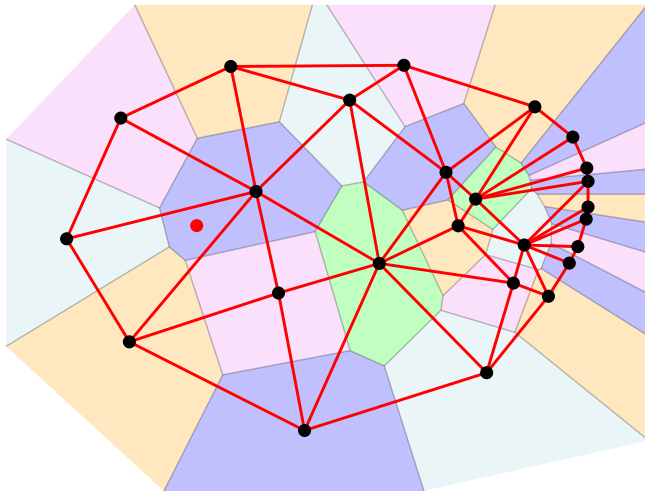
Maillage



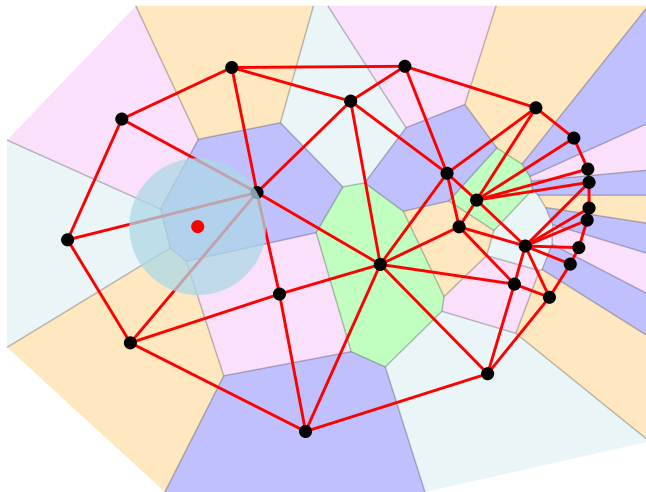
Plus proche voisin ?



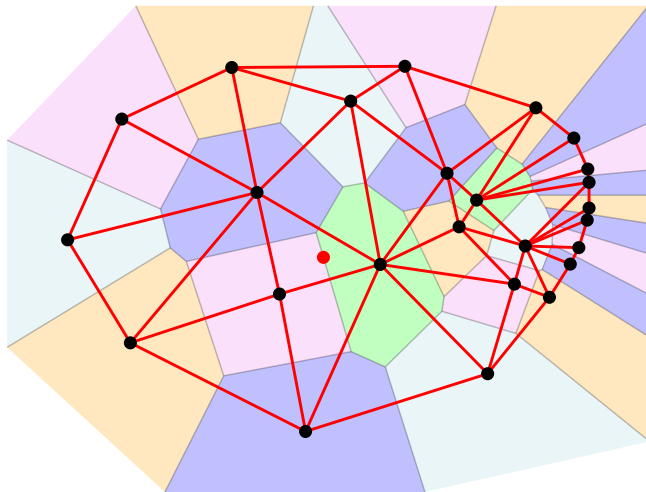
Plus proche voisin ?



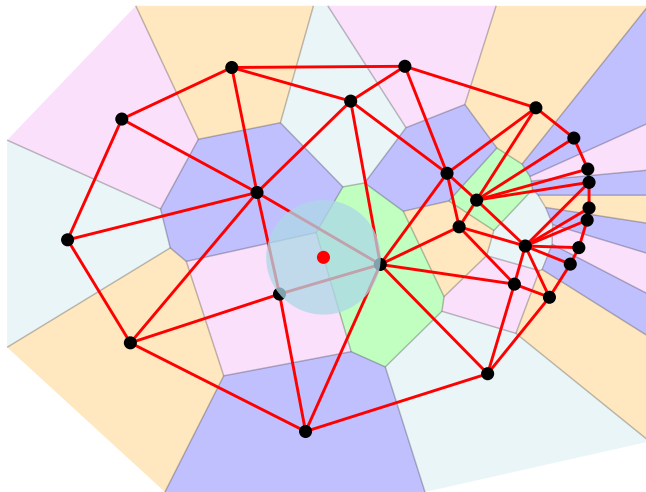
Plus proche voisin ?



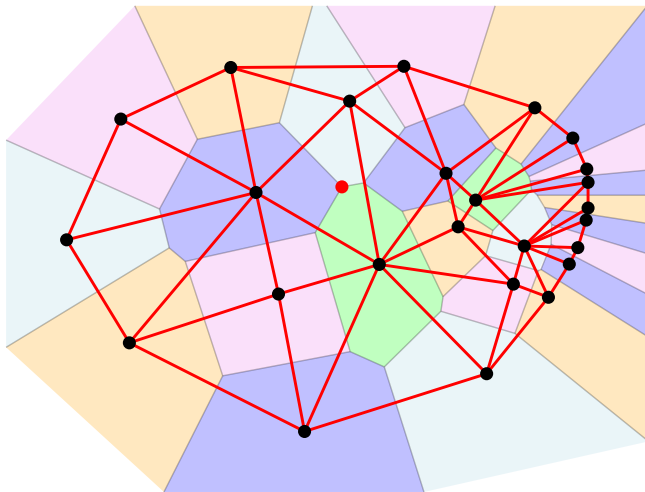
Plus proche voisin ?



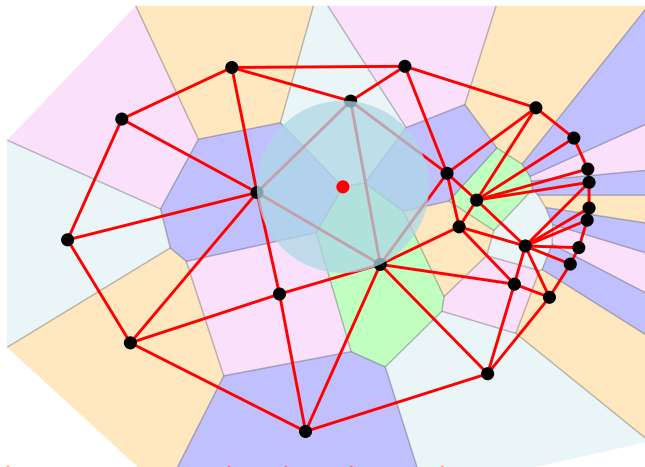
Plus proche voisin ?



Plus proche voisin ?



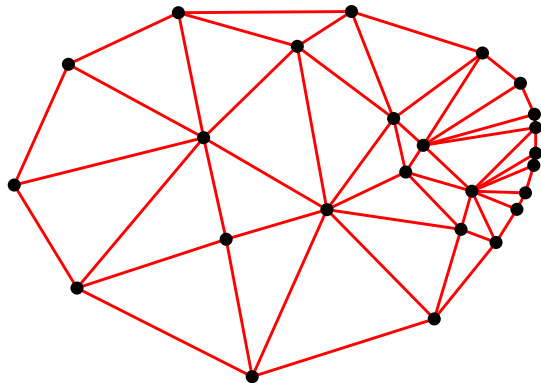
Plus proche voisin ?



Delaunay = triangles dont le cercle circonscrit est vide

Calculer Delaunay : algorithme

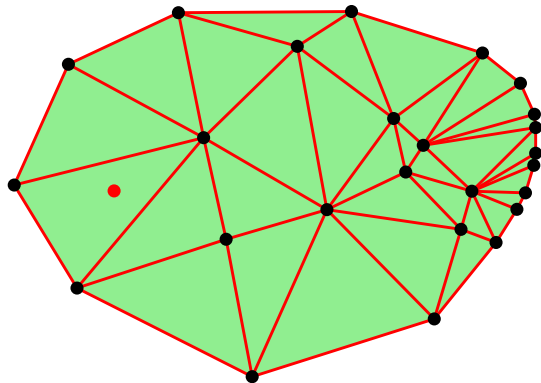
Algorithme incremental:



Calculer Delaunay : algorithme

Algorithme incremental:

Ajouter un nouveau point:

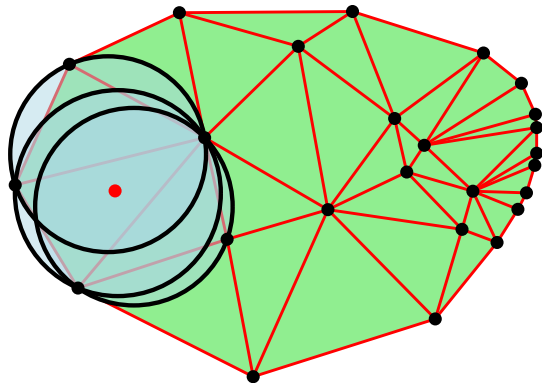


Calculer Delaunay : algorithme

Algorithme incremental:

Ajouter un nouveau point:

Trouver les triangles dont le cercle circonscrit contient le point



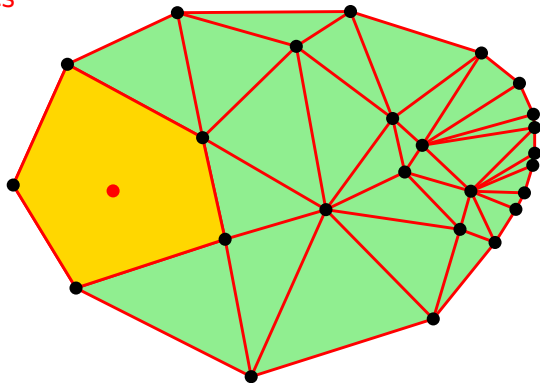
Calculer Delaunay : algorithme

Algorithme incremental:

Ajouter un nouveau point:

Trouver les triangles dont le cercle circonscrit contient le point

Supprimer ces triangles



Calculer Delaunay : algorithme

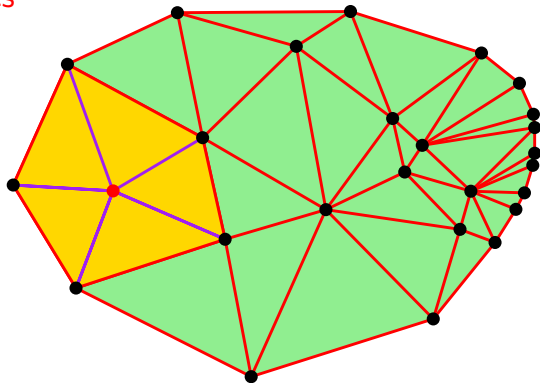
Algorithme incremental:

Ajouter un nouveau point:

Trouver les triangles dont le cercle circonscrit contient le point

Supprimer ces triangles

Retriangler



Calculer Delaunay : complexité

Algorithme incremental:

Complexité ?

Ajouter un nouveau point:

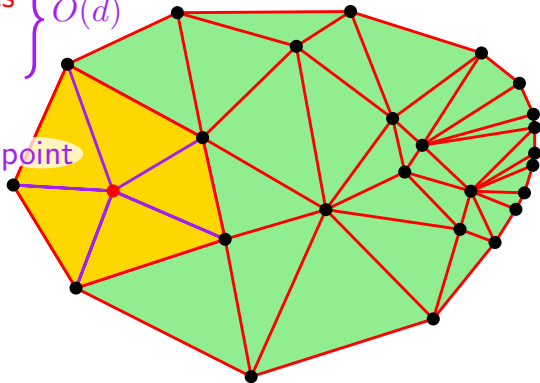
Trouver les triangles dont le cercle circonscrit contient le point $O(n)$

Supprimer ces triangles $O(d)$

Retriangler

Linéaire pour ajouter un point

Quadratique au total



Si on est malin

$O(\sqrt{n})$ $O(\log n)$ ~~$O(n)$~~

Trouver les triangles dont le cercle circonscrit contient le point

Supprimer ces triangles
Retriangler

} $O(d)$

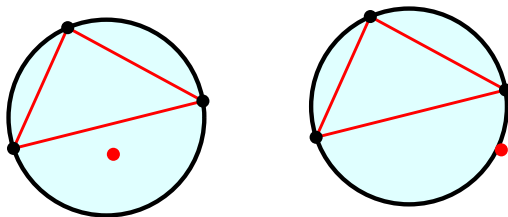
$$\sum d = O(n)$$

Si on évite un mauvais ordre des points

$$\Theta(n \log n)$$

Robustesse numérique

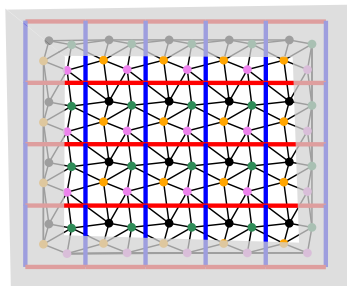
Trouver les triangles dont le cercle circonscrit contient le point



Calcul arrondi

Cohérence des différents tests ?

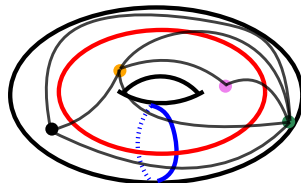
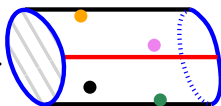
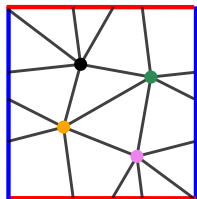
Géométrie algorithmique non euclidienne

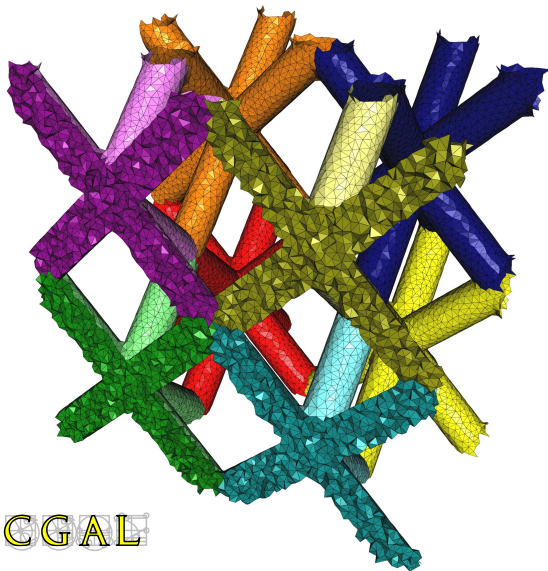


Periodic space

Compute triangulation

Torus

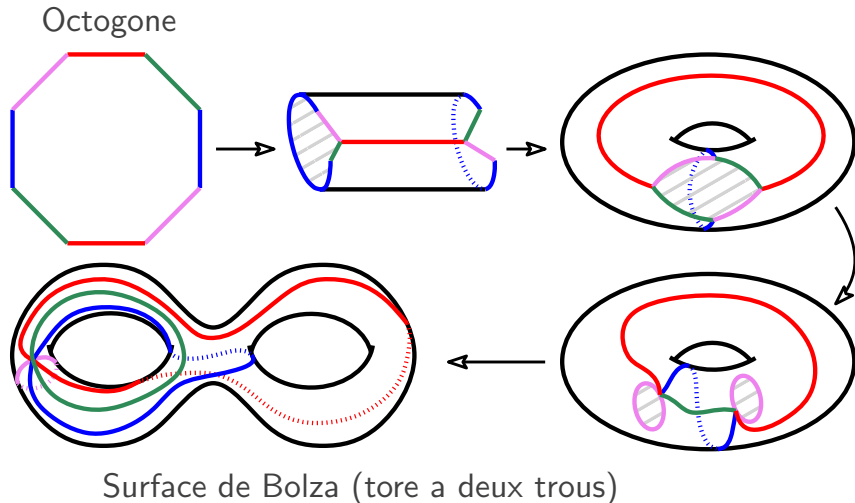


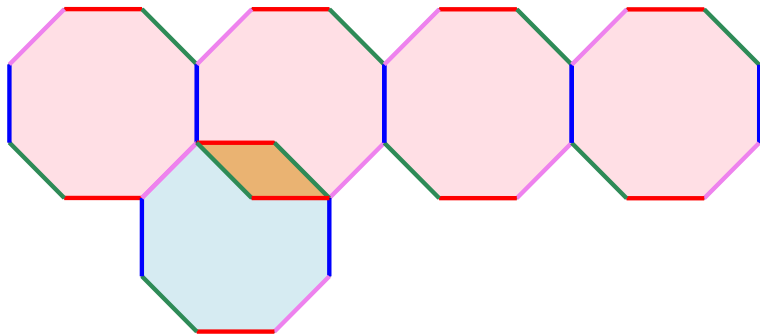


periodic meshes

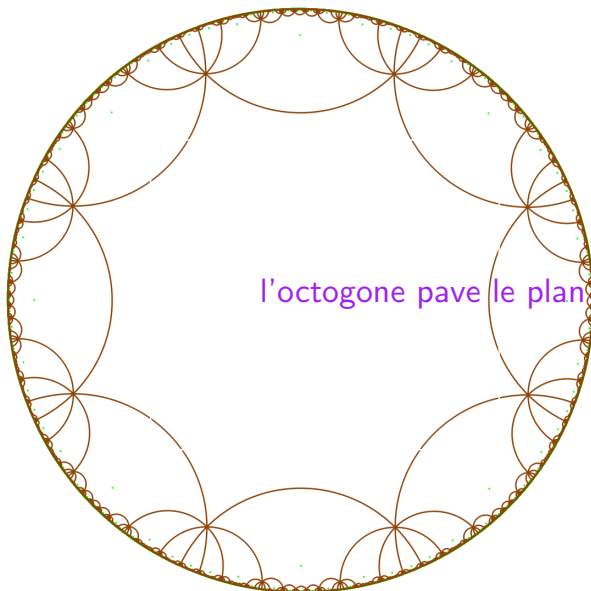
CGAL

Géométrie algorithmique non euclidienne

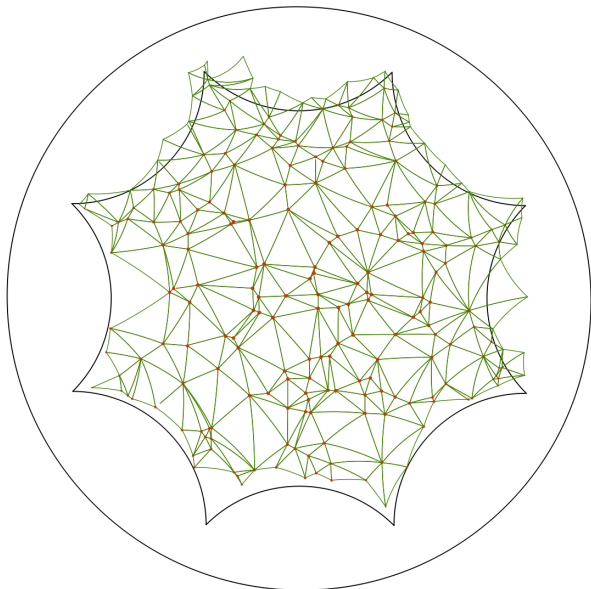




l'octogone ne pave pas le plan euclidien



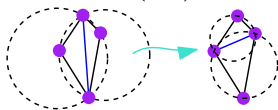
Géométrie algorithmique non euclidienne



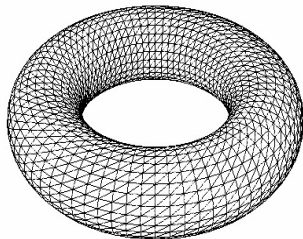
Dans le plan euclidien



suite de $\Theta(n^2)$ "flips"



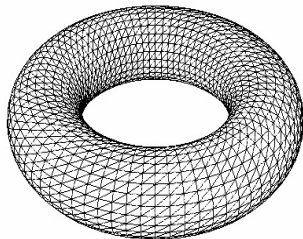
Tores plats



Tores plats

$O(f(T).n^2)$ flips

$f(T)$ mesure la qualité
de la triangulation T



But : proposer des heuristiques pour améliorer la complexité

- en pratique (benchmarking)
- en théorie

Variantes éventuelles

Groupes, Topologie



Section 3

Probabilité et géométrie algorithmique

Analyse dans le cas le pire

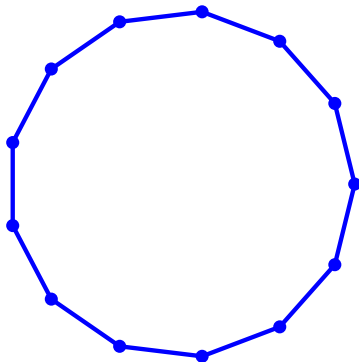
Trop pessimiste

Analyse sur des données complètement aléatoires

Trop optimiste

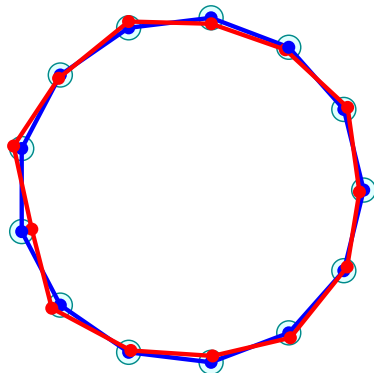
Analyses probabilistes plus réalistes

Analyse lissée



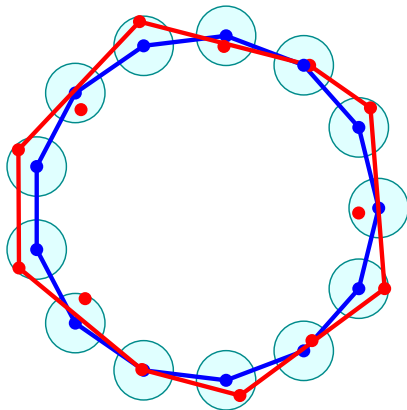
Analyses probabilistes plus réalistes

Analyse lissée



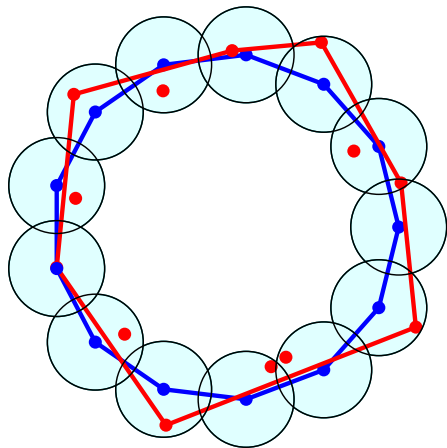
Analyses probabilistes plus réalistes

Analyse lissée



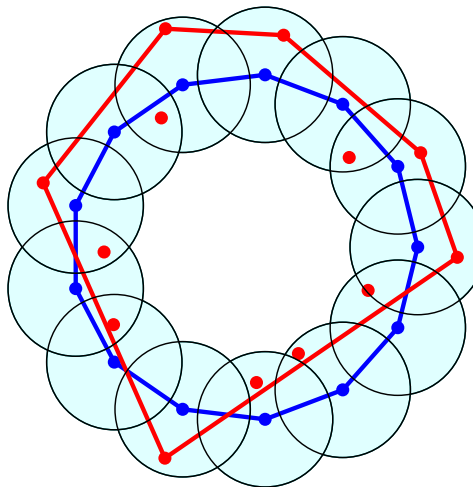
Analyses probabilistes plus réalistes

Analyse lissée



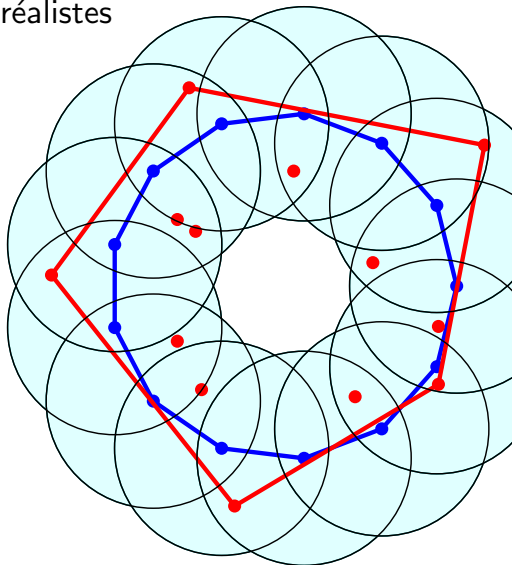
Analyses probabilistes plus réalistes

Analyse lissée

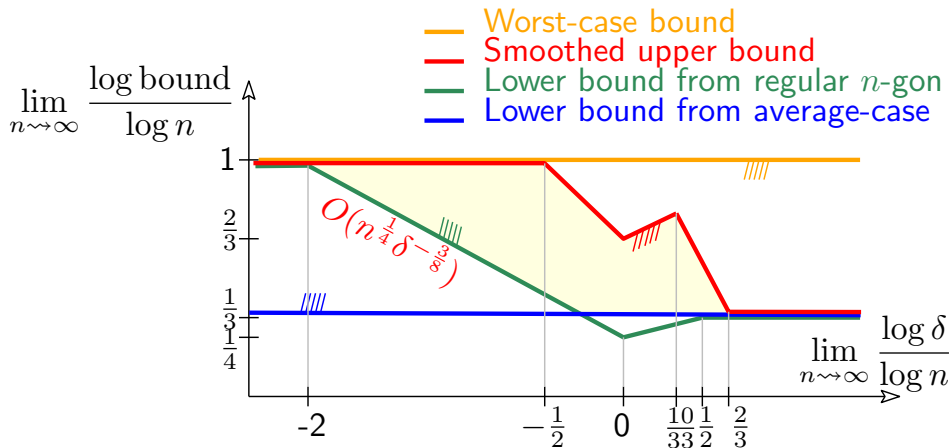


Analyses probabilistes plus réalistes

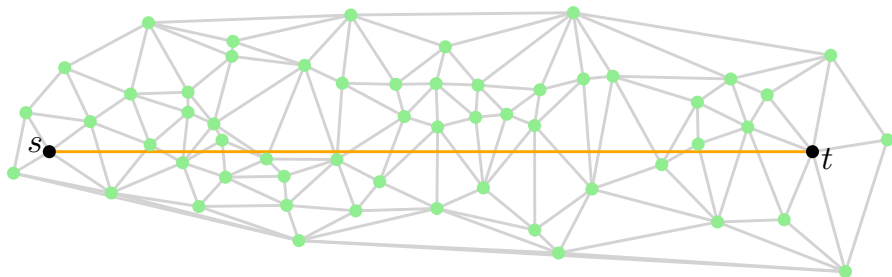
Analyse lissée



Analyses probabilistes plus réalistes

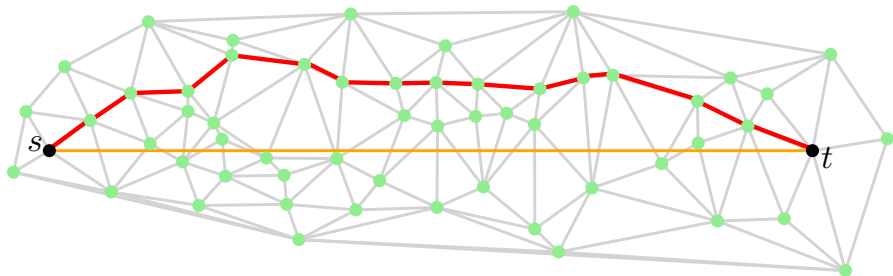


Marche dans un triangulation de Poisson Delaunay



Marche dans une triangulation

Marche dans un triangulation de Poisson Delaunay



Plus court chemin

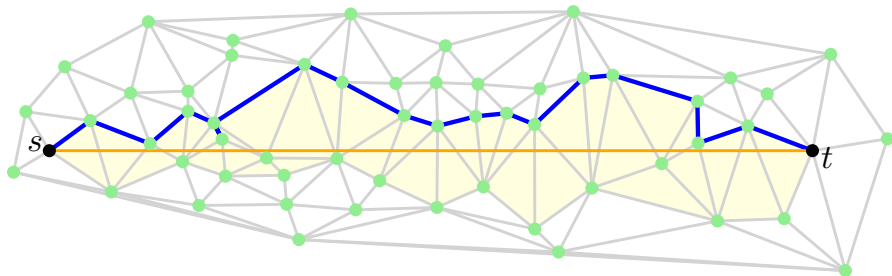
1.04

$\geq 1 + 10^{-11}$

[Chenavier & D., 2018]

Marche dans une triangulation

Marche dans un triangulation de Poisson Delaunay



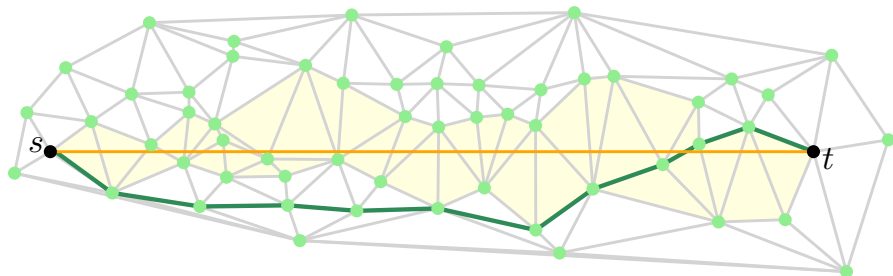
Chemin supérieur

$$\frac{35}{3\pi^2} \simeq 1.18$$

[Chenavier & D., 2018]

Marche dans une triangulation

Marche dans un triangulation de Poisson Delaunay

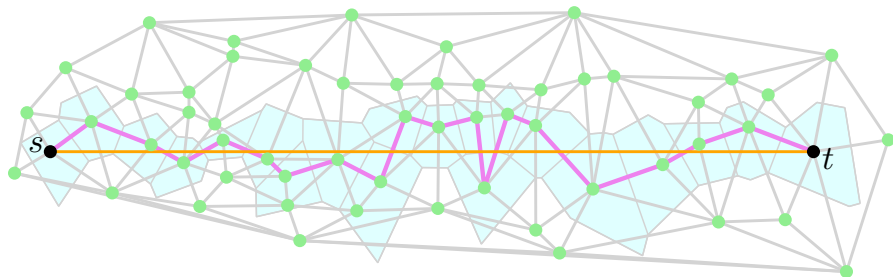


Chemin à la boussole

1.07

Marche dans une triangulation

Marche dans un triangulation de Poisson Delaunay



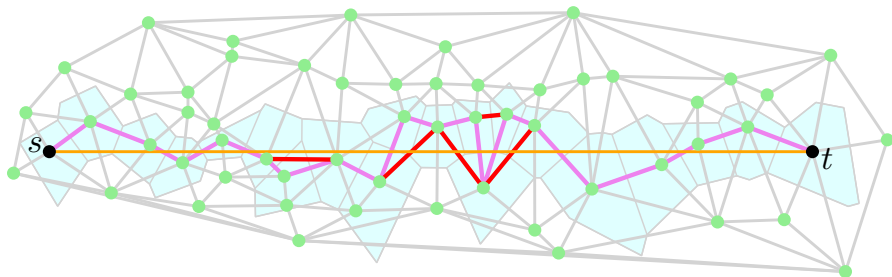
Chemin de Voronoï

$$\frac{4}{\pi} \simeq 1.27$$

[Baccelli et al., 2000]

Marche dans une triangulation

Marche dans un triangulation de Poisson Delaunay



Chemin de Voronoï

$$\frac{4}{\pi} \simeq 1.27$$

[Baccelli et al., 2000]

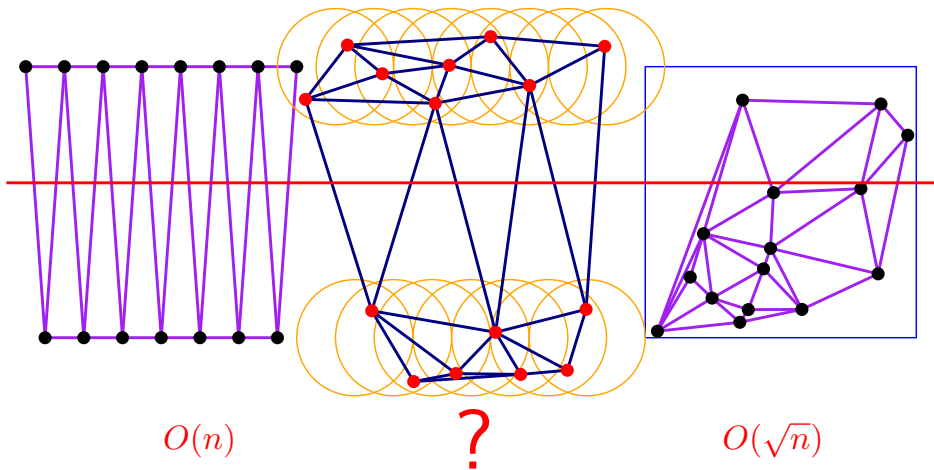
Chemin de Voronoï avec raccourcis

1.16

[D. & Noizet, 2018]

Stage - Marche dans la triangulation

Analyse lissée de la marche dans la triangulation



équipe Gamble à Nancy

ville étudiante sympathique,

où les loyers sont pas chers

où on va au boulot en vélo en 1/4 h.

Geometric Algorithms & Models Beyond the Linear & Euclidean realm

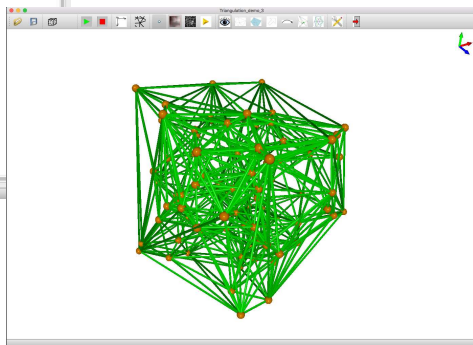
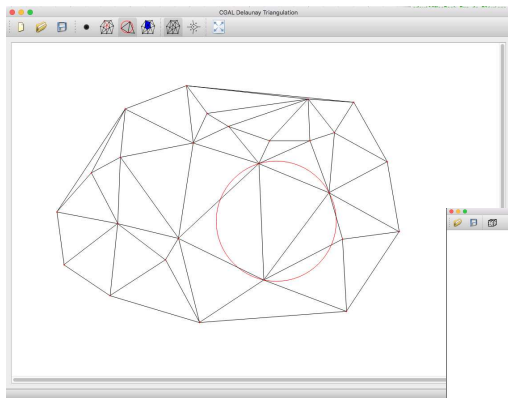
<https://gamble.loria.fr>

Géométrie algorithmique non linéaire

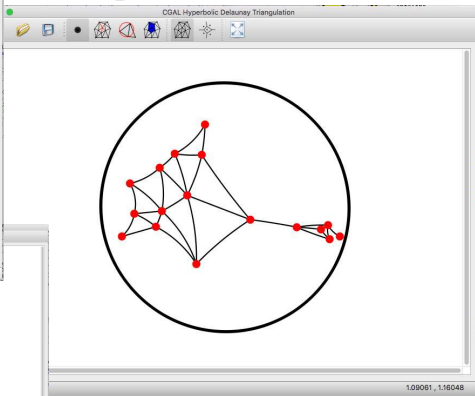
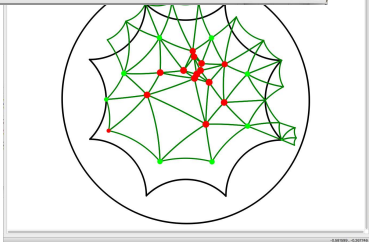
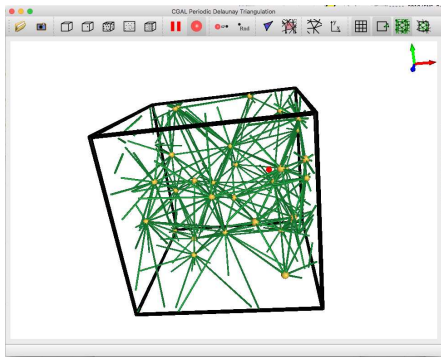
Géométrie algorithmique non euclidienne

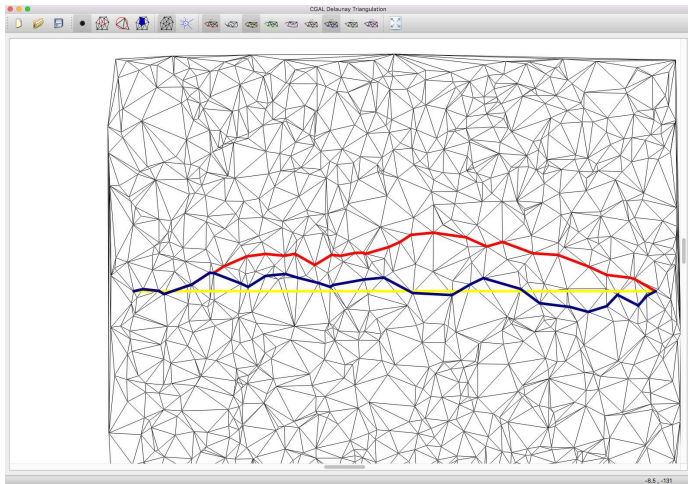
Probabilité et géométrie algorithmique

Structures géométriques discrètes



Logiciels de l'équipe

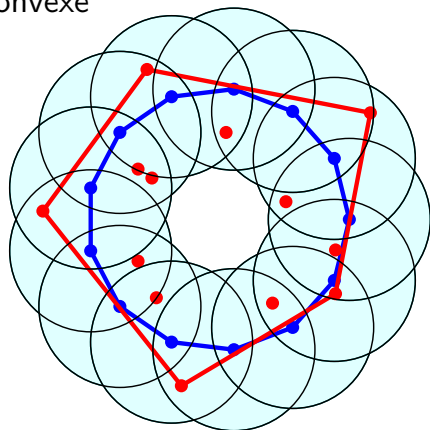




Que sont devenus nos doctorants

Rémy Thomasse, [2015]

Analyse lissée de l'enveloppe convexe



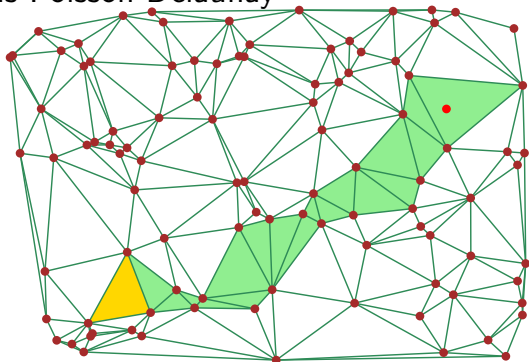
Ingénieur Dassault Systèmes

Que sont devenus nos doctorants

Ross Hemsley, [2014]

Marche par visibilité dans Poisson Delaunay

Complexité $O(\sqrt{n})$

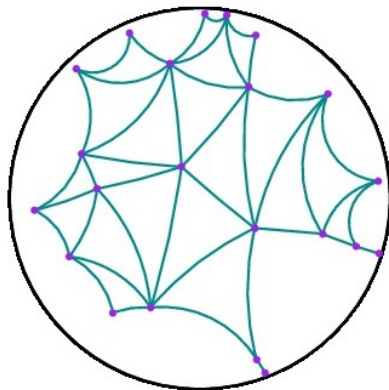


Ingénieur Blue Vision Labs

Que sont devenus nos doctorants

Mikhail Bogdanov, [2013]

Triangulations dans l'espace hyperbolique

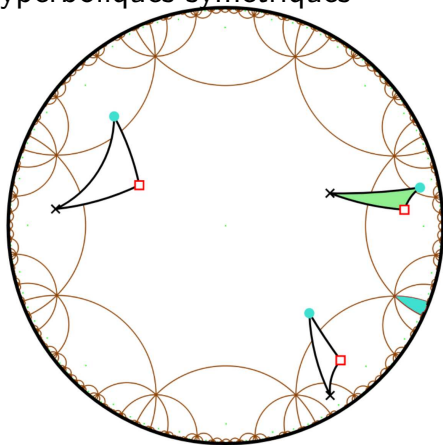


Ingénieur Amadeus

Que sont devenus nos doctorants

Iordan Iordanov, [2019]

Triangulations de surfaces hyperboliques symétriques

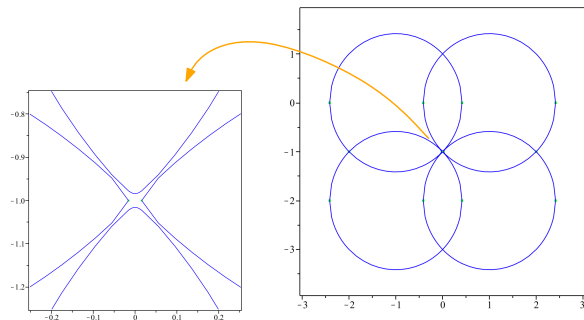


Chief Scientist,
Corpy & Co, Tokyo

Que sont devenus nos doctorants

Yacine Bouzidi, [2014]

Résolution de système et topologie des courbes planes



Chercheur à l'INRIA

Que sont devenus nos doctorants

Pedro de Castro, [2010], professeur, Brésil

Luis Peñaranda, [2010], chercheur, Brésil

Manuel Caroli, [2010], ingénieur Intel, puis SAP

Abdelkrim Mebarki, [2008], professeur, Algérie.

Luca Castelli, [2006], professeur, École Polytechnique.





Questions ?

<https://gamble.loria.fr>